



TITLE:

絶対温度 $<0$ となり得る点渦系の平衡分布の特性 (オイラー方程式の数  
理 : 渦運動150年)

AUTHOR(S):

八柳, 祐一

---

CITATION:

八柳, 祐一. 絶対温度 $<0$ となり得る点渦系の平衡分布の特性 (オイラー  
方程式の数理 : 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 87-100

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140603>

RIGHT:

# Equilibrium distribution of two-dimensional point vortices at positive and negative absolute temperature (絶対温度 $< 0$ となり得る点渦系の平衡分布の特性)

八柳祐一

YUICHI YATSUYANAGI

静岡大学教育学部

FACULTY OF EDUCATION, SHIZUOKA UNIVERSITY

## 1 初めに

我々の研究は、「渦現象にみられる構造形成の理解」という言葉でひとくくりにできる。その一つが、今回のテーマ「負温度点渦系」である。

Onsager は 1949 年に、有限領域に閉じ込められた 2 次元点渦系では、絶対温度が負になり得ることを予言した [1]。その論文で Onsager は、Boltzmann 因子  $\exp(-\beta E)$  の  $\beta$  が負となるような状態が可能であれば、木星の大赤斑などにみられる渦の大規模構造形成は、定性的に説明出来るのではないかと、というような指摘をしている [2]。

一方、著者は、京都大学際本研究室で行われている非中性プラズマを用いた渦実験に興味があり、点渦シミュレーションを始めた。軸方向に強磁場がかけられた円筒容器に閉じ込められた電子の、磁場に垂直な断面内の運動を記述する方程式は、Larmor 半径  $= 0$  の極限において、2 次元 Euler 方程式と同一となる [3, 4]。すなわち、磁場に垂直な断面内の電子軌道は、点渦法を用いて追跡可能なのである。純電子プラズマに対応した点渦系は、単一符号の循環を持った点渦から構成される系となる。

非中性プラズマを用いた渦実験では、特に、当時の実験で報告があった渦結晶に関する結果に大きく興味を持った [3, 5, 6]。もしかしたら、渦結晶状態を特徴付けるパラメタとして温度が使えるのではないかと、考えるようになったのが、負温度点渦系に関する研究の端緒である。また、我々は、これまで高速磁気再結合のメカニズムを理解するためのモデル「点電流・渦系」の提案 [7] などを行ってきたが、この研究でも大規模構造の形成が大きなキーワードであったことも、負温度状態の研究を始める動機の一つとなっている。

以下、点渦系、負温度状態について紹介したあと、我々のシミュレーション結果について説明し、最後に簡単なまとめを行う。

なお、本原稿の電子ファイルは、静岡大学学術リポジトリにて公開予定である。カラー原稿を参照されたい方は <http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/> からダウンロードしていただきたい。

## 2 点渦系

まず始めに、教科書レベルでも解説がある話ではあるが、研究室の学生向け資料として、点渦系の運動方程式の導出過程等を簡単にまとめておく [8]。

2次元渦度方程式を出発点とする。

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{r})}{\partial t} = -(\mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{r}) \quad (1)$$

次に、Dirac のデルタ関数を用いて離散化した「点渦」を導入する。流れ関数  $\psi(\mathbf{r})$ ，速度場  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ，渦度場  $\omega(\mathbf{r})$  は、それぞれ以下のように定義される。ここで、渦度は  $z$  軸方向を向き、流れ場は  $x-y$  平面に平行であるとした。

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_i^N \Gamma_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \sum_i^N \Gamma_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2\pi} \sum_i^N \Gamma_i \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \frac{1}{2\pi} \sum_i^N \Gamma_i \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \quad (3)$$

$$\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times (\psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}}) = \sum_i^N \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{\mathbf{z}} \quad (4)$$

ここで、 $G(\mathbf{r})$  は 2次元 Poisson 方程式に対する Green 関数 [9]， $\mathbf{r}_i$ ， $\Gamma_i$  は  $i$  番目の点渦の位置ベクトルと循環， $\hat{\mathbf{z}}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。また、全点渦の個数は、 $N$  とした。(4) 式を (1) 式に代入すると、

$$\sum_i^N \Gamma_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad (5)$$

が得られる。この式を、 $k$  番目の点渦の周り  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$  で面積積分する。積分する領域の半径  $\epsilon$  は十分小さく、他の点渦がこの中に入ることは無いと仮定すると、

$$\int_{\mathbf{r}_k} \left[ \sum_i^N \Gamma_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] = \int_{\mathbf{r}_k} \left[ \Gamma_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_k - \mathbf{u}(\mathbf{r}_k) \right) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k) \right] = 0 \quad (6)$$

となり、 $k$  番目の点渦の運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_k = \mathbf{u}(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k}^N \Gamma_i \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2} \quad (7)$$

が得られる。右辺は、いわゆる Biot-Savart 積分である。(7) 式は、 $k$  番目の点渦が、他の点渦が  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$  上に誘起する流れに張り付いて運動することを示している。この系の保存

量は、点渦系のエネルギー  $H$  と慣性モーメント  $I$  であり、それぞれ次式で与えられる。

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (8)$$

$$I = \sum_i^N \Gamma_i |\mathbf{r}_i|^2 \quad (9)$$

$k$  番目の点渦の運動方程式、すなわち位置ベクトル  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$  の時間発展方程式 (7) は、(8) 式のハミルトニアンを用いて

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (10)$$

と表すこともできる。

次に、今回、我々が対象とした系は、 $N/2$  個の循環が  $\Gamma_0 (> 0$ : 定数) の点渦 (正の点渦) と、 $N/2$  個の循環が  $-\Gamma_0$  の点渦 (負の点渦) が半径  $R$  の円筒境界に閉じ込められた系である。代表的な  $N$  の値は、6724 である。直前の話と大きく異なるのは、「境界」があるということである。この系の保存量も、点渦系のエネルギー  $H$  と慣性モーメント  $I$  となるが、エネルギー  $H$  は、次のように変更される。

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + \frac{1}{4\pi} \sum_i^N \sum_j^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}_j| - \frac{1}{4\pi} \sum_i^N \sum_j^N \Gamma_i \Gamma_j \ln \frac{R}{|\mathbf{r}_j|}, \quad (11)$$

円筒境界の効果は、 $\bar{\mathbf{r}}_i = R^2 \mathbf{r}_i / |\mathbf{r}_i|^2$  に置かれた鏡像渦により取り入れてある。なお、式 (11) で与えられる点渦系のエネルギーは、よく使われるスケールフリーな形式にはなっていない [8]。これは、円筒境界上での流れ関数の値をゼロとするために導入した式 (11) の右辺第 3 項に依るものである。鏡像渦がある系での  $k$  番目の点渦の運動方程式は、ハミルトニアンを (11) 式に置き換えると、(10) 式がそのまま使用できる。この場合の Biot-Savart 積分による表式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k}^N \Gamma_i \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_i^N \Gamma_i \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{r}}_i)}{|\mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{r}}_i|^2} \quad (12)$$

となる。

上記 (12) 式により点渦の運動をダイレクトに追跡する数値シミュレーションを行う場合には、若干の注意が必要である。(12) 式を  $N \approx 6000$  程度の系に対して計算すると、鏡像渦を含めて 12000 粒子の系になる。これだけの数の点渦系を例えば PC で扱おうとすると、物理的に有意義な結果を得るためには、原稿執筆時点 (2008 年 12 月) での比較的高速な CPU (Core 2 Quad Q9550 など) でも概ね 2ヶ月以上は必要で、我々がこの問題に取り組み始めたころに流通していた CPU (Pentium4 660 3.6GHz) だと 300 日程度かかるとの見積りだった。通常はこの日数を短縮するために、Vortex-In-Cell 近似を用いたり、遠方の相互作用をまとめて計算する Tree code を用いるなどの工夫を行うが、我々はさらに別の速度改善方法、すなわち、分子動力学専用計算機 MDGRAPE-2、およびその後継機種

MDGRAPE-3により、Biot-Savart 積分を高速化する、という手法をとった。これら専用計算機を用いることにより、12000 個の点渦系で 400 万タイムステップのシミュレーションを、おおむね 20 時間で終了させることが可能である [4, 10]。

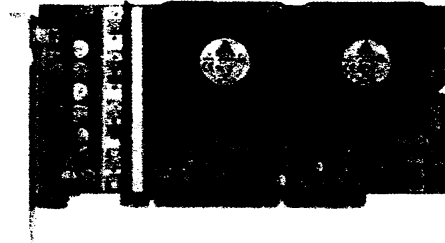


図 1: 分子動力学専用計算機 MDGRAPE-3。PC の PCI-X スロットに挿入して使用する。シミュレーションプログラムからは、点渦の位置と循環の値を配列に格納して渡すと Biot-Savart 積分を計算してくれるサブルーチンがあるようにしか見えない。

### 3 負温度点渦系

統計力学的に温度  $T$  は、エントロピー  $S$ 、エネルギー  $E$  を用いて

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k_B \frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} \quad (13)$$

と定義される。ここで、Boltzmann の原理  $S = k_B \ln W(E)$  を使った。 $W(E)$  は状態密度である。通常、状態密度はエネルギーが上がるにつれ急激に増加する関数となるため、 $T$  が負となることは無い。ここで、仮に、全状態数

$$\int W(E) dE \quad (14)$$

が有限となるような系があったと仮定する。すると、状態密度  $W(E)$  は、 $E \rightarrow \infty$  の極限で  $W(E) \rightarrow 0$  とならなければならない、少なくともある  $E_0$  において状態密度はピークとなり、 $E > E_0$  で  $W(E)$  は減少関数となる。すなわち、 $E > E_0$  において、(13) 式右辺の符号は負となるため、(13) 式により定義される温度も負となる状態が現れうる。これが、いわゆる「負温度」状態である。

Onsager は、1949 年に発表した論文において、有限領域に閉じ込められた点渦系でも、負温度状態があり得ることを指摘した [1]。点渦系の運動方程式は、前述のとおり (10) 式のように表すことができる。いわゆる正準方程式との類推から、Onsager は点渦系の相空間は配位空間  $(x, y)$  と一致すると考えた。すると、点渦群が閉じ込められている領域の面積が  $A$  とすると、全相空間体積は

$$\int d\Omega = \left( \int dx dy \right)^N = A^N \quad (15)$$

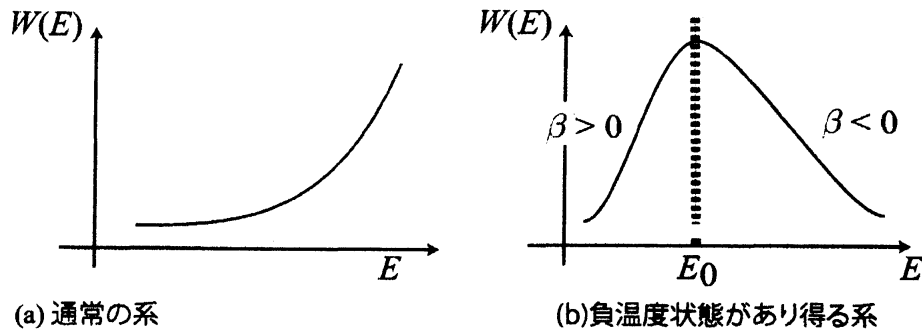


図 2: 状態密度をエネルギーの関数としてプロットした結果。通常の系では状態密度はエネルギーの増加と共に急激に増加するが、負温度状態がある系では全状態数が有限のために、 $E \rightarrow \infty$  の極限で  $W(E) \rightarrow 0$ 、すなわち  $W(E)$  は、ある  $E_0$  でピークを持つ関数となり、 $E > E_0$  で温度は負となる。

となり、全相空間体積が有限となる。全相空間体積を相空間の微小体積要素で除した値が全状態数に一致することから、全相空間体積が有限＝全状態数が有限となり、有限領域に閉じ込められた点渦系には負温度状態が現れうるということがわかる。

## 4 温度による点渦系の特徴付け

以下で、我々が行ったシミュレーション結果の説明を行う。平衡分布については他の論文等にすでに報告している内容であるが、一連の結果を理解するために必須の図が含まれているので、読者の利便性のため、掲載している [4, 11]。

### 4.1 平衡分布

様々な温度 (エネルギー) の初期分布を人工的に生成し、それらを (12) 式により長時間、時間発展させることにより、時間漸近的に平衡分布を得た。結果を図 3 に示す。

図 3 の左側がエネルギーが低い状態、右側がエネルギーが高い状態である。左端の図は正温度であるが、それより右側の図はすべて負温度である。正温度の場合は、正の点渦と負の点渦は円筒境界内にほぼ一様に分布する。図で一様分布に見えないのは、ほぼ一様な点渦分布での速度場は至る所でほぼゼロとなり、完全に一様分布になるまで緩和させるためには膨大な計算時間がかかるためである。

温度が正から負へ転移すると、小さな渦塊 (クランプとも呼ばれる) が生成されるようになる。個々の小さな渦塊は、基本的に単一符号の点渦のみから構成されている。この傾向はさらにエネルギーが高くなると顕著になり、エネルギーの上昇とともに、渦塊のサイズは大きくなる。そして、最終的には右端の 2 枚の図に見られるような dipole 状の分布を形成する。右端の図では薄い背景渦の中に二つの渦塊が浮かんでいるような配位となっ

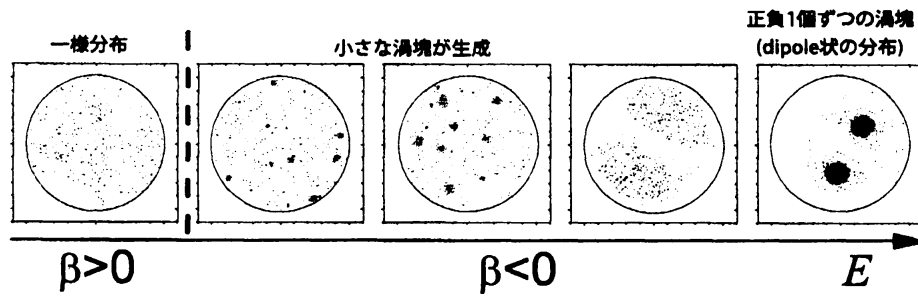


図 3: 時間発展シミュレーションにより時間漸近的に得た平衡分布。正温度側では正負の点渦は一様に分布するのに対して、負温度側では正は正、負は負の点渦で凝集する傾向が強くなり、最終的には単一符号の点渦のみから構成される渦塊が形成され、dipole 状の分布となる。

ているが、さらにエネルギーが高い状態を作ると、背景に散らばる点渦もなくなり、最終的に、正の全点渦がある 1 点、負の全点渦が別のある 1 点に凝集した状態が理想的には実現される。そして、この系で実現出来る最もエネルギーが高い状態が、図 4 に示した状態である。円筒境界の中心からの距離  $d$  が  $(\sqrt{5} - 2)^{1/2} R$  となる時に、系のエネルギーは最大値  $E_{\max}$  に達する。 $E_{\max}$  より高いエネルギー状態は、点渦の個数、及び循環が固定されている限り、どのようにしても作り出すことは不可能である。すなわち、今考えている系には、 $E_{\max}$  よりも高いエネルギーに実現可能な状態は存在しない。先ほどの負温度に関する説明において、エネルギーが無限大の極限で状態密度がゼロとなるような系だと負温度状態が現れると説明したことを思い出すと、ある系においてエネルギーが最大となる状態が存在し、それ以上エネルギーが高い状態は存在し得ないということは、その系で負温度状態があり得ることを意味すると考えてもよい。

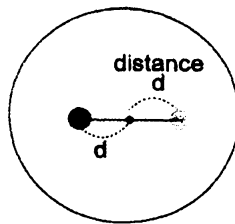


図 4: 最高エネルギーとなる配位。正の全点渦が 1 点、負の全点渦が別の 1 点に集中し、2 個の渦塊を形成している。 $d$  は各渦塊から円筒境界中心までの距離である。 $d = (\sqrt{5} - 2)^{1/2} R$  でエネルギーは最大となる。回転の自由度を考慮しなければ、これが唯一の最高エネルギー配位となり、これ以上のエネルギーにおける状態数は、ゼロである。

次に、正温度側の平衡分布の特徴について、見ていこう。正温度側でエネルギーの異なる二つの平衡分布を図 5 に掲載する。

点渦分布を目でみるだけでは違いが分からないので、2 体相関関数を導入する。ここでの 2 体相関関数は、点渦間の距離の度数分布である。正温度の場合と負温度の場合の代表

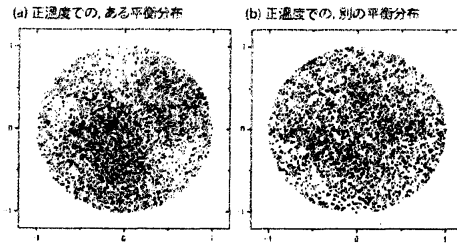


図 5: 正温度側での二つの平衡分布。一見同じような分布であるが、二つの分布は、エネルギーが異なるため別の平衡分布となっている。

的 2 体分布関数を、図 6、及び 7 に掲載する。これらの図では、正の点渦を基準にした正の点渦分布 (plus-plus: 以下, PP と省略), 及び負の点渦分布 (plus-minus: 以下, PM と省略) の二つの線がプロットされている。

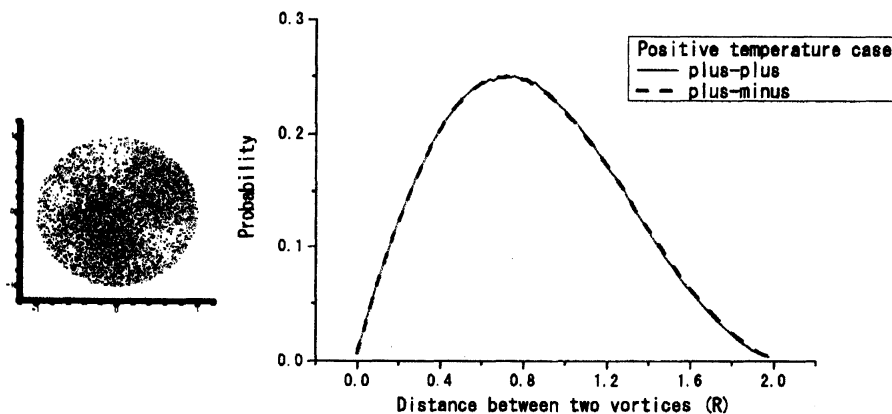


図 6: 正温度の平衡分布と、2 体相関関数。正の点渦の周りの正の点渦分布, 及び正の点渦の周りの負の点渦分布が等しいため、二つの相関関数は同一の形状となる。よって、二つの線が重なり、1 本の線のみが見える。

正温度の場合 (図 6), 正負の点渦分布はほぼ一樣なので, PP, PM は同一の曲線となるはずで、実際、図 6 での二つの曲線はほぼぴったり重なっているため、1 本の線しか見えない。一方、負温度の場合 (図 7), 特徴的な分布は、図 7 左側に示してあるような形になり、同符号の点渦同士で凝集している。つまり、正の点渦の近くには負の点渦よりも正の点渦がいる確率が高いので、PM より PP の線のほうが、距離が短い所にピークをもつ。また、正の点渦からみた負の点渦が沢山存在する所は、対極にある負の点渦から構成される渦塊であり、両渦塊の平均的な距離は  $R$  程度である。よって、PM の線は、 $R$  程度の距離のところにピークをもつと理解できる。

上記の 2 体相関関数を、図 5 に示した二つの平衡分布について計算した結果を、図 8 に示す。図 8 の左右の図は、それぞれ図 5 の左右に掲載された分布に対応した 2 体相関関数である。左側の図では、PP, PM の線は共に距離がゼロの極限でゼロに落ちていくが、右



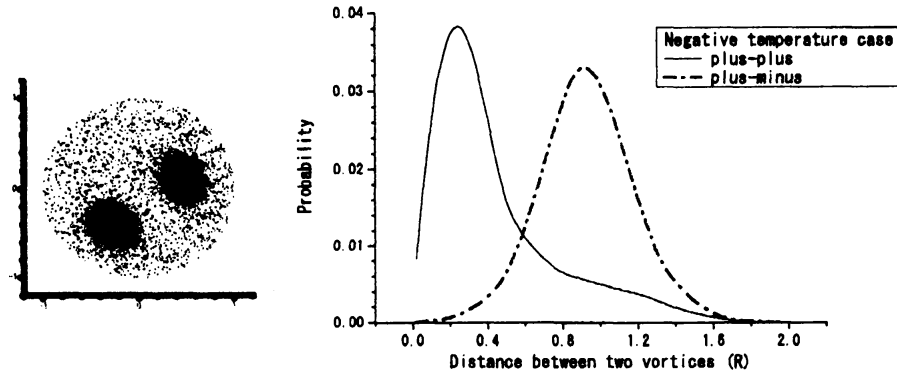


図 7: 負温度の平衡分布と、2 体相関関数。負温度の場合は同符号の点渦が凝集する傾向があるため、正の点渦の周りの正の点渦分布のグラフは、負の点渦分布のグラフよりも短距離の位置にピークをもつ。正の点渦の周りの負の点渦分布は、二つの渦塊間の距離程度の位置にピークがでる。

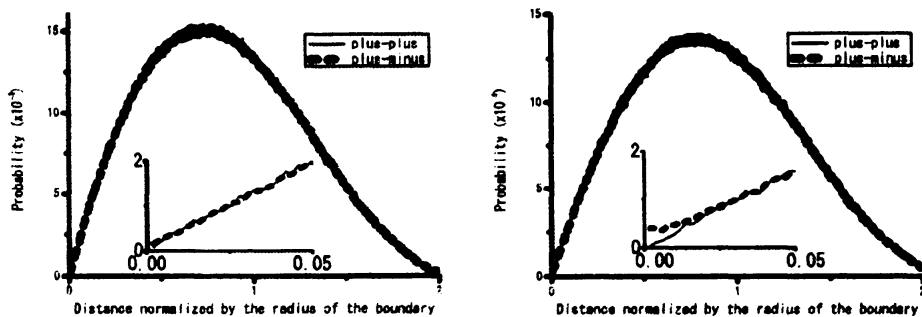


図 8: 正温度側の二つの 2 体相関関数。左側の 2 体相関関数は図 5 の左側、右側の 2 体相関関数は図 5 の右側に掲載した分布に対応する。また、挿入図は、原点付近を拡大した図である。左側は原点付近で、正の点渦の周りの正の点渦分布と負の点渦分布が同様にゼロに漸近していくが、右側では、両者は一致せず、正の点渦分布はゼロに漸近するのに対し負の点渦分布は有限の値を保ったままである。すなわち、ある点渦に注目した場合、同符号の点渦よりも異符号の点渦のほうが、自身の近くに多く存在することを表している。なお、図 6, 7 に比べて線がジャギーなのは、より細かいスケールで相関関数を計算したために、「ゆらぎ」が大きくなっていることを表す。

側の図では、PPの線は距離がゼロの極限でゼロに行くのに対してPMの線は有限にとどまる。これを模式的に表すと、図9のようになる。

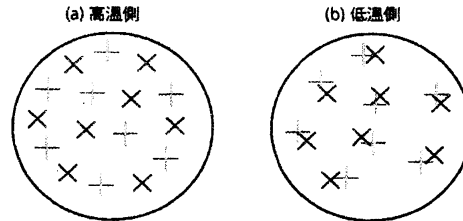


図9: 正温度側の二つの平衡分布の模式図。左側は正温度の高温側で、右側は絶対0度近くの「凍り付いた」状態を表す。

図5に掲載された二つの平衡分布のエネルギーを比較すると、左側の分布のエネルギーの方が高い。すなわち、正温度の高温側が左側の分布に対応する。一方、右側の分布は正温度の低温側に対応し、絶対0度により近い側と理解できる。つまり図9の右側に示した分布は、正負の点渦が「凍り付いた」ような状態であると理解することが出来る。

次に、我々は、時間発展シミュレーション以外の方法で、正温度側の平衡分布を得ることができないか検討した結果、正準モンテカルロシミュレーションにより得ることができた。正準モンテカルロシミュレーションでは、 $\beta$ ,  $\nu$ をパラメータとして系統的に変化させながら、メトロポリスの方法に従い、以下の作業を行う[12]。まず始めに、乱数を用いて正負同数の点渦を円筒境界内に配置し、適当な初期分布を作る。つぎに、この分布から、エネルギー  $H_i$ , 慣性モーメント  $I_i$  の値を、(9), (11)式を用いて求める。ここで、添字  $i$  は、 $i$  番目の試行であることを表す。点渦を1個ランダムに選択して、任意の移動を行った後、再びエネルギー  $H_{i+1}$ , 慣性モーメント  $I_{i+1}$  を求める。そして、 $\exp(-\beta H_{i+1} + \nu I_{i+1}) > \exp(-\beta H_i + \nu I_i)$  が成り立つならば  $i+1$  番目の移動を受け入れる。成り立たないならば、さらに0以上1以下の新たな乱数  $\alpha$  を用いて、

$$\exp(-\beta(H_{i+1} - H_i) + \nu(I_{i+1} - I_i)) > \alpha \quad (16)$$

が成り立つか判定し、成り立つならば  $i+1$  番目の移動を受け入れる。成り立たないならば、 $i+1$  番目の移動は受け入れず、粒子の位置を元に戻す。以上の作業を、十分緩和が進むまで繰返し行う。この結果、最終状態として得られた点渦の分布は平衡分布に達していると見なす。正準モンテカルロシミュレーションにより得られた正温度の平衡分布を図10に示す。

$\nu$  の値が大きい場合には慣性モーメントによる拘束が強く働くため、正の点渦は境界に張り付き、負の点渦は中央に凝集するような分布となる。一方、 $\beta$  が大きい場合にはエネルギーによる拘束が強く働くため、エネルギーの値を出来る限り小さくする方向へ緩和が進む。正負点渦が共存する系では、同符号の点渦が凝集するとエネルギーの値は大きくなる。一方、異符号の点渦が凝集するとエネルギーの値は小さくなるため、 $\beta$  が大きい場合には「凍り付いた」分布が実現されやすい。また、 $\beta$  が小さく  $\nu$  も小さい場合には点渦は出来る限りニュートラルな分布、すなわち正負がまんべんなく混じった一様分布となる。

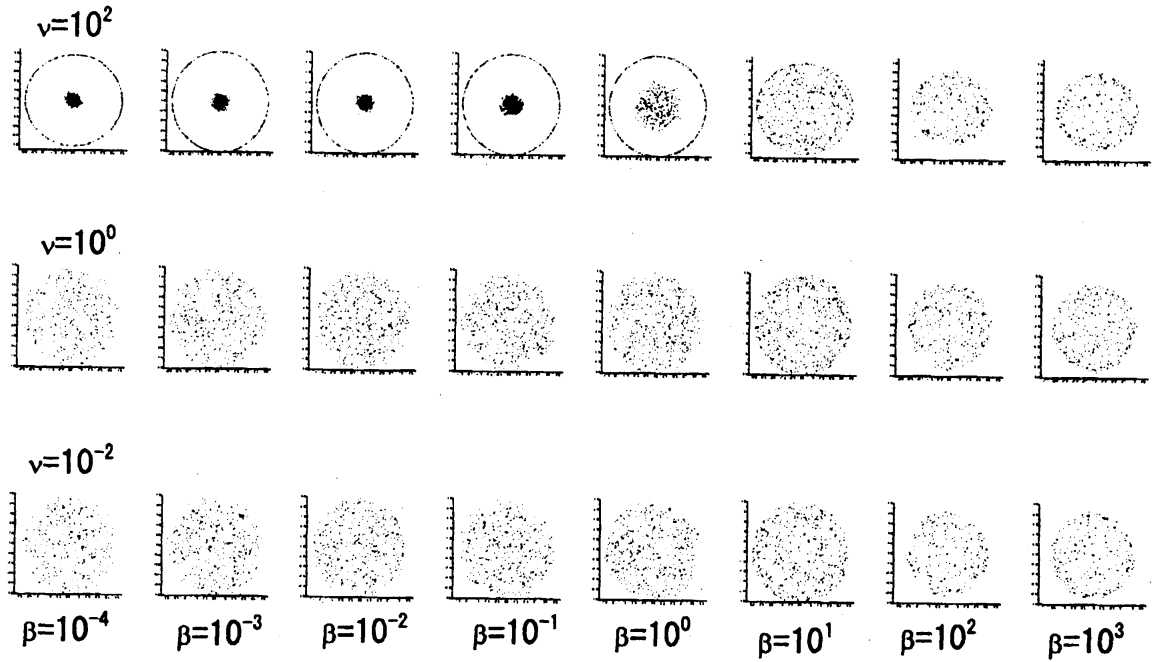


図 10: 正準モンテカルロシミュレーションにより得た、正温度の平衡分布図。点渦数は  $10^3$ 、モンテカルロステップ数は  $10^5$  である。 $\beta$  が大きくなる右側の領域に、「凍り付いた」状態が現れていることが確認できた。

以上より、正準モンテカルロシミュレーションでも、図 5 の二つの相に対応する平衡分布が確かに得られることが確認できた。

## 4.2 エネルギースペクトル

円筒境界に囲まれた領域に閉じ込められた点渦系のエネルギースペクトルは、次式で与えられる [13, 14]。

$$\begin{aligned}
 E(k) = & \frac{1}{4\pi k} \sum_i^N \Gamma_i^2 + \frac{1}{4\pi k} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j J_0(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \\
 & - \frac{1}{2\pi k} \sum_i^N \sum_j^N \Gamma_i \Gamma_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{\ell} \left( \frac{|\mathbf{r}_j|}{R} \right)^{\ell} \times J_{\ell}(kR) J_{\ell}(k|\mathbf{r}_i|) \cos(\ell(\varphi_i - \varphi_j)) \\
 & + \frac{1}{2\pi k} \sum_i^N \sum_j^N \Gamma_i \Gamma_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{\ell} \left( \frac{|\mathbf{r}_j|}{R} \right)^{\ell} \times J_{\ell}^2(kR) \cos(\ell(\varphi_i - \varphi_j))
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\epsilon_{\ell} = \begin{cases} 1 & \ell = 0, \\ 2 & \ell \geq 1, \end{cases} \tag{18}$$

$$x_i = |\mathbf{r}_i| \cos(\varphi_i), \quad y_i = |\mathbf{r}_i| \sin(\varphi_i). \tag{19}$$

(17) 式の第 1, 2 項は, Novikov によって得られた結果であり, 境界がない場合の点渦系のスペクトルを与える。残りの項が吉田らによって得られた結果であり, 円筒境界の効果を表す。時間漸近的に得られた様々な温度における平衡状態分布に対して, (17) 式を用いて計算をしたエネルギー・スペクトルの結果を, 図 11 に示す。

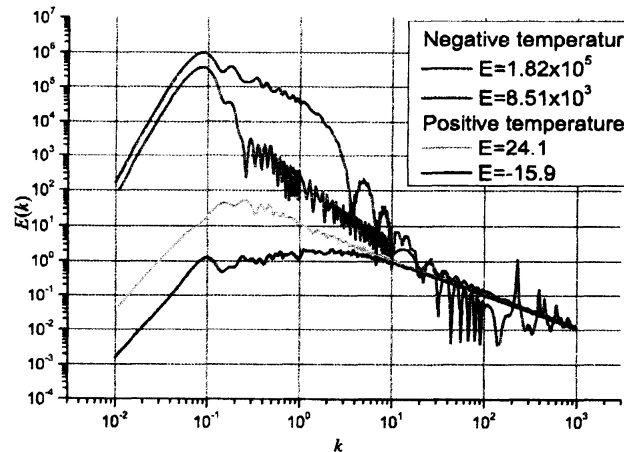


図 11: 様々な温度におけるエネルギー・スペクトルの比較。温度 (エネルギー) に応じてエネルギー・スペクトルの形状が変化する様子が読み取れる。

まず, 負温度の場合について詳しく見てみよう。図 12 に  $E = 8.51 \times 10^3$  の場合の特徴的スケールを示す。境界が無い場合は, 境界の直径よりも長いスケールまで傾き  $-1$  の線

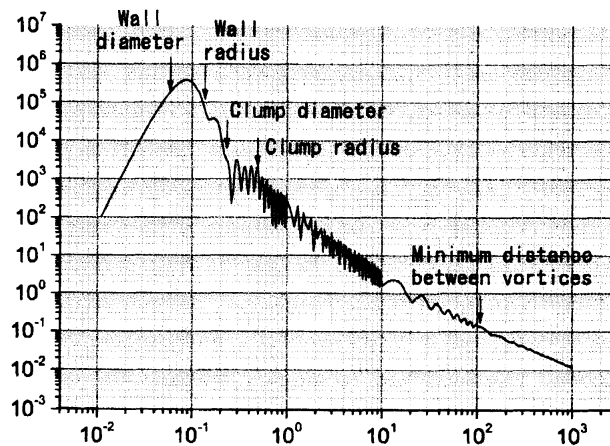


図 12: 負温度の場合の代表的エネルギー・スペクトル。渦塊のスケールに対応した部分で, 傾きは  $-2$  を示す。

が延びるが, 図 12 から分かるとおり, 境界がある場合には, 円筒境界の直径のスケールが低波数側の限界となる。一方, 高波数側は, 最小点渦間距離よりも短いスケールでは傾きが  $-1$  になっている。上記の低波数側, 及び高波数側の制限に関しては正温度の場合も

同様に成り立つことが、図 11 の正温度側のグラフから読み取れるだろう。負温度の場合は、渦塊の半径程度から最小点渦間距離より 1 桁低波数側 (図 12 では、 $10^1$ ) の範囲でのスペクトルの傾きが  $-2$  になっている。この波数領域を、以後、中波数領域と呼ぶ。さらにいろいろな温度の平衡状態について調べたところ、このスケールは、負温度側で特徴的に生成される渦塊と関連があるスケールであることが分かった。エネルギーが低く渦塊のサイズが大きい場合には、図 12 のように、広い範囲で傾きが  $-2$  になるのに対し、エネルギーが高く渦塊のサイズが小さくなると、傾きが  $-2$  となる領域は狭く、かつ高波数側にシフトする。この傾向を確認するために作成したのが、図 13 である。この図は、負温

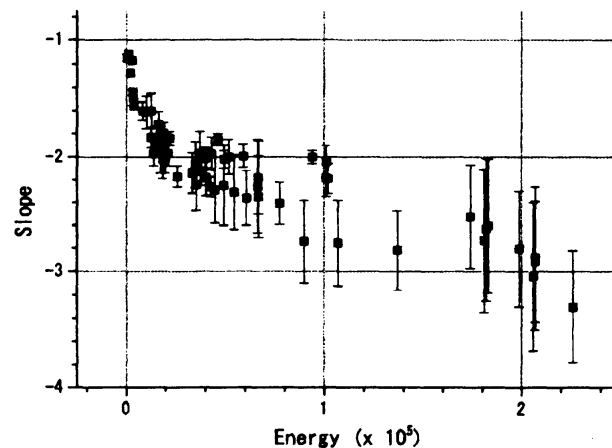


図 13: 負温度の場合の中波数領域の傾きをエネルギーの関数としてプロット。エネルギーが上がるにつれて、確かに傾きが急に成っている様子が分かる。ユニバーサルに  $-2$  が現れている部分は、クランプ内部の構造に依存した部分で、渦塊に対応したスケールに  $-2$  が現れることを発見した。

度の場合の中波数領域で、傾きがエネルギーとともにどのように変化していくかをプロットしたものである。エネルギーが低く明確な渦塊が見られない場合は正温度側のように傾きは  $-1$  になるのに対し、エネルギーが高くなり渦塊が形成されると  $-2$  が支配的になるが、さらにエネルギーが高くなると、中波数領域の傾きはエネルギーと共に急 (右肩下がり) になっていくことがわかる。

次に、正温度側の特徴について。図 11 において、正温度に対応する  $E = 24.1$  のケースは、図 5 の左側 (一様分布)、 $E = -15.9$  のケースは、同図の右側 (凍り付いた状態) に対応している。分布が一様ならば、(17) 式において右辺第 1 項の定数項以外の項は、 $\Gamma_i \Gamma_j > 0$  の項と  $\Gamma_i \Gamma_j < 0$  の項で互いに相殺するので、第 1 項の寄与のみが残り傾きは  $-1$  になるはずであるが、凍り付いた状態の場合は一様分布ではないため、相殺されず傾きは  $-1$  以外の値となる。しかし、なぜ図 11 のような形状になるのか、という点までは分かっていない。

## 5 まとめ

正負同数の点渦が円筒境界内に閉じ込められた系を温度をパラメタとして理解するための研究である。時間漸近的に得た平衡分布は正温度側では一様分布になるのに対し、負温度側では同符号で凝集した分布となり、確かにボルツマン因子  $\exp(-\beta E)$  の  $\beta$  が負となっていることが確認できる。また、エネルギースペクトルにおいても、各分布に対応した様々な情報が得られることがわかった。

この研究の今後の方向としてはいくつか考えられるが、現在は、Montgomery らが提唱した sinh-Poisson 方程式の問題 [15] や、渦結晶配位を特徴付ける統計的パラメタについて調べているところである。

## 謝辞

本研究では、京都大学人間環境学研究科教授 際本泰士氏、同名誉教授 冨田博之氏、同助手 佐野光貞氏、同学生 吉田剛氏にお世話になりました。様々な助言をいただきありがとうございました。また、本研究で使用した分子動力学専用計算機 MDGRAPE-3 は、理化学研究所 チームリーダー泰地真弘人氏、主任研究員 戎崎俊一氏の御厚意により使用させていただきました。ありがとうございました。

- [1] L. Onsager: *Nuovo Cimento Suppl.* **6** (1949) 279.
- [2] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan: *Rev. Mod. Phys.* **78** (2006) 87.
- [3] 際本泰士: *日本物理学会誌* **56** (2001) 253.
- [4] 八柳祐一: *ながれ* **27** (2008) 23.
- [5] Y. Kiwamoto, N. Hashizume, Y. Soga, J. Aoki, and Y. Kawai: *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 115002.
- [6] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, T. Ebisuzaki, T. Hatori, and T. Kato: *Phys. Plasmas* **10** (2003) 3188.
- [7] Y. Yatsuyanagi, , T. Ebisuzaki, T. Hatori, and T. Kato: *Phys. Plasmas* **10** (2003) 3181.
- [8] P. K. Newton: *The N-Vortex Problem* (Springer-Verlag, Berlin, 2001) chapter 1-3.
- [9] 今村勤: *物理とグリーン関数* (岩波書店, 東京, 1978).
- [10] <http://www.peta.co.jp>.
- [11] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida, and T. Ebisuzaki: *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 054502.

- [12] 神山新一, 佐藤明: モンテカルロ・シミュレーション (朝倉書店, 東京, 1997) chapter 3.
- [13] T. Yoshida and M. M. Sano: J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 587.
- [14] E. A. Novikov: Sov. Phys. JETP, **41** (1975) 937.
- [15] G. Joyce and D. Montgomery: J. Plasma Phys. **10** (1973) 107.